I/ Suite de fonctions

1/ Convergence simple et uniforme.

Définition 1 : Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$

On dit que (f_n) converge simplement vers f sur I si et ssi

$\forall x \in I$; x fixé : la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$

c.à.d $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Definition 2 : On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I

si et ssi : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

c.à.d : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad \delta_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

c.à.d $\quad \delta_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

2/ Propriétés

P1 : S'il existe une suite (U_n) convergente vers 0 telle que :

$\forall x \in I : \quad |f_n(x) - f(x)| < a_n$ alors f_n C.U vers f sur I

P2 : Si (f_n) C.U vers f sur I alors (f_n) C.S vers f sur I

la reciproque est fausse

Exemple : $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ $\quad (f_n)$ C.S vers $f = 0$ sur $\mathbb{R}$

et $f_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ d'où $\delta_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}$ ne converge pas vers 0. donc (f_n) ne converge pas uniformément vers $f = 0$ sur $\mathbb{R}$

3/ Critère de Cauchy de la convergence uniforme

(f_n) C.U sur $I \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ ; \ \forall m > N$

$\forall x \in I : \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

4/ Continuité de la limite uniforme

Si (f_n) C.U vers f sur I et f_n continue sur I alors f est continue sur I

c.à.d $\forall x_0 \in I \quad \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$

Remarque : Si f_n continue sur I et (f_n) C.S vers f sur I et f non continue sur I alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I

5/ Integration d'une limite uniforme

Si (f_n) c.u vers f sur $[a,b]$ et f_n continue sur $[a,b]$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

6/ limite d'une suite de fonctions derivables

Si (f_n) derivable sur $[a,b]$ et f_n c.s vers f sur $[a,b]$ et si (f_n') converge uniformement vers g sur $[a,b]$ alors (f_n) c.u vers f sur $[a,b]$ et f est derivable sur $[a,b]$ telle que $f'=g$

c.a.d $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$ soit encore $\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$

II/ Series de fonctions

1/ Convergence simple et uniforme (C.S et S.U)

Soit (f_n) une suite de fonctions definies sur I

On pose $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$

On dit que la serie de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement (uniformement) vers $f(x)$ sur I si et ssi la suite (S_n) converge simplement (uniformement) vers f sur I et on ecrit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

2/ Convergente absolue (CA)

On dit que la serie $\sum f_n(x)$ converge absolument sur I si et ssi la serie $\sum |f_n(x)|$ converge simplement sur I

3/ Propriété :

la serie $\sum f_n(x)$ c.u sur $I \Leftrightarrow$ le reste $R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_p(x)$ c.u vers 0 sur I

c.a.d $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall x \in I \ \forall n > N : |R_n(x)| < \varepsilon$

4/ Convergence normale (CN)

la serie $\sum f_n(x)$ converge normalement sur I si et ssi $\exists$ une suite (U_n) à termes positives telle que $\forall x \in I : |f_n(x)| < U_n$ et $\sum U_n$ c.v

5/ Propriétés :

$$CN \Rightarrow \begin{matrix} C.A \\ C.U \end{matrix} \Rightarrow C.S$$

Les implications récíproques sont en general fausses

6/ Criteres de convergence simple ... Cours

Pour chaque x fixé de I, $f_n(x)$ est le terme general d'une serie numerique, on peut ainsi utiliser les criteres de convergence vus precedement (critere d'Alembert, Cauchy, Abel ...)

7/ Continuité de la somme

Si f_n continue sur I et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ c.u vers f sur I

alors f est continue sur I

8/ Inversion limite – Somme

Soit (f_n) suite de fonctions continues sur $[a,b]$ et $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = U_n$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ c.u sur $[a,b]$ alors $\sum U_n$ c.v et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)$$

9/ Integration de la somme

Si f_n continue sur $[a,b]$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ c.u sur $[a,b]$ vers f

alors f est continue sur $[a,b]$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

/ Derivation de la somme

(f_n) derivables (de classe C^1) sur $[a,b]$ telles que :

i/ $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $\sum f_n(x_0)$ c.v

ii/ la serie $\sum f_n'(x)$ c.u sur $[a,b]$ alors $\sum f_n(x)$ c.u sur $[a,b]$ vers f alors f est derivable (de classe C^1) sur $[a,b]$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

/ Régle d'Abel pour les series de fonctions :

Soit $f_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x)$ definies sur I : si

i/ $\forall x \in I$: $a_n(x) > 0$; $a_n(x)$ decroissante, $\lim_{+\infty} a_n(x) = 0$

ii/ $\left| \sum_{k=0}^{n} b_k(x) \right| \leq M$ alors la serie $\sum f_n(x)$ c.u sur I